Matrices et déterminants

Généralités sur les matrices

Exercice 1 [00700] [correction]
Soit A une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice 2 [00702] [correction]
Résoudre l'équation $X^2 = A$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 [00703] [correction]
a) Monter qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non inversible si, et seulement si, elle est équivalente à une matrice nilpotente.
b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application vérifiant : $f(O_n) = 0$, $f(I_n) = 1$ et pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$f(AB) = f(A)f(B)$$

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $f(A) \neq 0$.

Exercice 4 [00707] [correction]
Soit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$ et $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que $(S_N(x))^2 - 1 - x$ est un polynôme dont la plus petite puissance de x est de degré $\geqslant N+1$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Justifier l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = I + A$.

Exercice 5 [00712] [correction]
Soit $D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto DM - MD$$

a) Déterminer noyau et image de l'endomorphisme φ.
b) Préciser ces espaces quand D est à coefficients diagonaux distincts.

Exercice 6 Centrale MP [02390] [correction]
Soit n un entier $\geqslant 2$ et $\mathcal{A}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable pour le produit matriciel.
a) On suppose que $I_n \notin \mathcal{A}$. Montrer, si $M^2 \in \mathcal{A}$, que $M \in \mathcal{A}$. En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ que la matrice $E_{i,i}$ est dans $\mathcal{A}$. En déduire une absurdité.
b) On prend $n = 2$. Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 7 Mines-Ponts MP [02687] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où B est nilpotente et commute avec A. Montrer que A et $A + B$ sont simultanément inversibles.

Commutation de matrices

Exercice 8 [00697] [correction]
On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent et que A est inversible.
Justifier que A^{-1} et B commutent.

Exercice 9 [00709] [correction]
a) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
b) Même question aves les matrices commutant avec toutes celles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 10 Mines-Ponts MP [02689] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des complexes distincts, $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$$

Montrer que $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de $C(A)$.

Exercice 11 [03144] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
a) Montrer que

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), AM = MA\} = \{\lambda I_n / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A = MN \Rightarrow A = NM$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$

Exercice 12 Centrale MP [03164] [correction]
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.
Montrer que T commute avec sa transposée si, et seulement si, la matrice T est diagonale.

Exercice 13 [03166] [correction]
Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices symétriques.

Exercice 14 [03167] [correction]
Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices antisymétriques.

Rang d'une matrice

Exercice 15 [00701] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de rang 1.
a) Etablir l'existence de colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = X^tY$.
b) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice 16 [00698] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les rangs de A et B.
b) Calculer BA en observant $(AB)^2 = AB$.

Exercice 17 [00699] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ matrices de rang 2 vérifiant $(AB)^2 = AB$.
Montrer $BA = I_2$.

Exercice 18 [02602] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r.
Déterminer la dimension de l'espace

$$\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / ABA = O_n\}$$

Exercice 19 [01602] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
a) Justifier qu'il existe $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$\mathrm{rg}(UA + BV) = \min(n, \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B)$$

b) On suppose $\mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B \geqslant n$. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$UA + BV \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 20 [03134] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
a) On note $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les colonnes de B à droite de celles de A.
Montrer

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right) = \mathrm{rg}A \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B = AU$$

b) On note $\left(\dfrac{A}{C} \right) \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les lignes de C en dessous de celles de A.
Montrer

$$\mathrm{rg}\left(\dfrac{A}{C} \right) = \mathrm{rg}A \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), C = VA$$

c) En déduire

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{rg}A \Leftrightarrow \exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}$$

Exercice 21 [00710] [correction]
Soit G un groupe multiplicatif formé d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que les éléments de G ont tous le même rang.

Calculs par blocs

Exercice 22 [03264] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

a) Montrer que A est inversible si, et seulement si, B l'est.
b) Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 [01604] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$

Etablir

$$\text{rg}M = \text{rg}A + \text{rg}B$$

Exercice 24 [01649] [correction]
Soient $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Montrer

$$\text{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = n + \text{rg}C$$

Exercice 25 [02335] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$

On suppose B inversible. Etablir

$$\text{rg}M = p \Leftrightarrow A = O_n$$

Exercice 26 [03101] [correction]
Soient $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$$

Déterminer le rang de M en fonction de celui de C.

Exercice 27 [00747] [correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r décomposée par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ supposée inversible.
a) Montrer que pour toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$ il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ telle que

$$M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

b) En déduire que $D = CA^{-1}B$.

Exercice 28 [03137] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

On suppose que les matrices A, D et M sont inversibles.
Exprimer M^{-1}.

Représentations matricielles

Exercice 29 [00714] [correction]
Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ canoniquement représenté par A.
a) Exprimer $\varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
b) Calculer A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
c) Calculer A^{-1}.

Exercice 30 [00715] [correction]
Soient $a \in \mathbb{C}^\star$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\bar{z}$.
Former la matrice de l'endomorphisme f du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans la base $(1, i)$.
Déterminer image et noyau de f.

Exercice 31 [00717] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
b) Calculer A^n.

Exercice 32 [00718] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.
b) Calculer A^n.

Exercice 33 Centrale MP [02380] [correction]
Quels sont les $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telles que $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$.

Exercice 34 Mines-Ponts MP [02679] [correction]
Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f^2 = g^2 = 0$ et $f \circ g = g \circ f$. Calculer $f \circ g$.

Exercice 35 Mines-Ponts MP [02688] [correction]
Soit ω une racine primitive $n$ème de 1. On pose

$$F_\omega(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$$

pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Montrer que F_ω est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et exprimer son inverse.

Exercice 36 Centrale MP [03060] [correction]
Soient n, p et q trois naturels non nuls et deux applications linéaires $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
a) Démontrer qu'il existe une application linéaire $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ telle que $u = w \circ v$ si, et seulement si, on a l'inclusion des noyaux

$$\ker(v) \subset \ker(u)$$

Dans ce cas, déterminer toutes les applications w qui conviennent.
b) Pour résoudre cette question, on utilisera un logiciel de calcul formel.
Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = CB$?
Déterminer toutes les matrices C solutions.
c) Pour la matrice B donnée dans la question précédente, caractériser par leurs colonnes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = CB$.
Déterminer dans ce cas l'ensemble des solutions C.
d) Soient trois applications linéaires $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ et $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
Démontrer qu'il existe deux applications linéaires $w_1, w_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ telles que $u = w_1 \circ v_1 + w_2 \circ v_2$ si, et seulement si,

$$\ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$$

Matrices semblables

Exercice 37 [00719] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 38 [00720] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Exercice 39 [00721] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.
Etablir que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 40 [00722] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^{n-1} \neq O_n$ et $A^n = O_n$.
Etablir que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 41 [00723] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle telle que $\mathrm{Im}A$ et $\ker A$ soient supplémentaires.
Montrer que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } A' \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$$

Exercice 42 [00724] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $r = \mathrm{rg}A$.

Exercice 43 [00725] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant

$$A^3 = -A$$

Montrer que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 44 [00726] [correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + I = 0$.
Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 45 [00728] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}A = 0$.
Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ \star & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 46 [03136] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
a) Montrer que A est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.
b) En déduire

$$A^2 = \mathrm{tr}(A).A \text{ et } \det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr}A$$

Exercice 47 Centrale MP [02382] [correction]
Quelles sont les matrices carrées réelles d'ordre n qui commutent avec $\mathrm{diag}(1, 2, \dots, n)$ et lui sont semblables ?

Exercice 48 Mines-Ponts MP [02691] [correction]
Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 49 X MP [03032] [correction]
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, f(AB) = f(A)f(B)$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, prouver l'équivalence :

$$A \text{ inversible } \Leftrightarrow f(A) \neq 0$$

Exercice 50 Centrale MP [01322] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $A^2 = O_3$.
Déterminer la dimension de l'espace

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})/AM - MA = O_3\}$$

Trace

Exercice 51 [03258] [correction]
Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB - BA = I_n?$$

Exercice 52 [03259] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices vérifiant

$$AB - BA = A$$

Calculer $\mathrm{tr}(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 53 [00729] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer que $f^2 = \mathrm{tr}(f).f$.
A quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

Exercice 54 [03029] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\varphi(M) = MA$$

Exprimer la trace de φ en fonction de celle de A.

Exercice 55 Centrale MP [00730] [correction]
Soit M une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$.
Montrer que si $\mathrm{tr}M = 0$, il existe deux matrices A et B telles que

$$M = AB - BA$$

Exercice 56 [00731] [correction]
Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

Exercice 57 [00732] [correction]
Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une forme linéaire vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), T(AB) = T(BA)$$

Etablir que $T \in \mathrm{Vect}\,\{\mathrm{tr}\}$.

Exercice 58 [00733] [correction]
On note tr la forme linéaire trace sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Etablir que $\ker(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A, B \in E\}$ en notant $[A,B] = AB - BA$.

Exercice 59 [00711] [correction]
Etablir que $\mathrm{Vect}\,\{AB - BA/A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 60 [00735] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + {}^tX = \mathrm{tr}(X)A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 61 [03261] [correction]
a) Dans un espace de dimension finie, pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace ?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$.
Montrer

$$\dim \ker(A - I_n) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}(A^k)$$

Exercice 62 Mines-Ponts MP [00734] [correction]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ d'ordre fini n.
Montrer que

$$\dim\left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{Id}_E)\right) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} \operatorname{tr} g$$

Exercice 63 Centrale MP [02388] [correction]
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et H une partie non vide et finie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication.
a) Soit $M \in H$. Montrer que $k \in \mathbb{N}^\star \mapsto M^k \in H$ n'est pas injective.
En déduire que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Soient

$$q = |H| \text{ et } P = \frac{1}{q}\sum_{M \in H} M$$

b) Montrer, si $M \in H$, que $MP = PM = P$. En déduire $P^2 = P$.
c) Trouver un supplémentaire, dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, stable par tous les éléments de H, de

$$\bigcap_{M\in H} \ker(M - I_n)$$

d) Montrer que

$$\sum_{M\in H} \operatorname{tr} M \in q\mathbb{N}$$

Que dire si cette somme est nulle ?

Exercice 64 Mines-Ponts MP [02651] [correction]
a) Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum\limits_{g\in G} \operatorname{tr} g = 0$. Montrer que $\sum\limits_{g\in G} g = 0$.
b) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par les éléments de G. Montrer qu'il existe un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^n$ stable par tous les éléments de G.

Exercice 65 Mines-Ponts MP [02686] [correction]
a) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(AB) = f(BA)$, montrer que f est proportionnelle à la trace.
b) Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $g(AB) = g(BA)$ pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace.

Déterminants

Exercice 66 [00738] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$.
Calculer le déterminant de la matrice B de colonnes
$C_1 - C_2, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$.

Exercice 67 [02355] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

Exercice 68 [00752] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ déterminé par $\varphi_A(M) = AM$.
Calculer la trace et le déterminant de φ_A

Exercice 69 [02603] [correction]
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si la matrice A est à coefficients entiers, qu'elle est inversible et que son inverse est à coefficients entiers.
a) Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ alors $|\det A| = 1$.
b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}\,, A + kB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
Calculer $\det A$ et $\det B$.

Exercice 70 [02604] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ de colonnes $A_1, \dots, A_n$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $B_1, \dots, B_n$ déterminées par $B_j = \sum\limits_{i \neq j} A_i$.
Exprimer $\det B$ en fonction de $\det A$.

Exercice 71 Mines-Ponts MP [02650] [correction]
On note V l'ensemble des matrices à coefficients entiers du type

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

et G l'ensemble des $M \in V$ inversibles dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et dont l'inverse est dans V.
a) Quelle est la structure de G ?
b) Soit $M \in V$. Montrer que $M \in G$ si, et seulement si, $\det M = \pm 1$.
c) Donner un groupe standard isomorphe à G muni du produit.

Exercice 72 Mines-Ponts MP [02659] [correction]
Soit des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux. Montrer l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = I_n$$

Exercice 73 Mines-Ponts MP [02695] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

Montrer que $\det A = 0$ puis $A = 0$.

Exercice 74 X MP [00229] [correction]
Soient A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg} H = 1$. Montrer :

$$\det(A + H)\det(A - H) \leqslant \det A^2$$

Exercice 75 [01413] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Montrer que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., f(x_j), ..., x_n) = \text{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$$

Exercice 76 [01587] [correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Etablir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A$$

Exercice 77 [03278] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant 1$$

Montrer

$$|\det A| \leqslant 1$$

Calcul de déterminants

Exercice 78 Mines-Ponts MP [02693] [correction]
Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}$$

où $x, a_1, \dots, a_n$ réels.

Exercice 79 [00742] [correction]
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Calculer

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 80 [02384] [correction]
Calculer pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ le déterminant suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 81 Centrale MP [02385] [correction]
Calculer

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 82 Centrale MP [02386] [correction]
Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)$. Calculer :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Exercice 83 [00748] [correction]
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on considère $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$.
Calculer $\det \left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (déterminant de Cauchy).
Traiter en particulier le cas $\forall i \in [\![1,n]\!], a_i = b_i = i$ (déterminant de Hilbert)

Exercice 84 [00749] [correction]
Etablir que l'inverse de la matrice $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est à coefficients entiers.

Exercice 85 X MP [00299] [correction]
On pose

$$P_n(X) = X^n - X + 1$$

a) Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1,\dots,z_n$ dans $\mathbb{C}$.
b) Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$$

Exercice 86 [03124] [correction]
Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice de coefficient

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ b_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminants tridiagonaux

Exercice 87 [01433] [correction]
Pour $a \in \mathbb{K}^\star$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 2a \end{vmatrix}$$

Exercice 88 [01436] [correction]
Soient $a,b \in \mathbb{C}^\star$ distincts. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 89 [00739] [correction]
Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & (0) \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ (0) & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 90 [00740] [correction]

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 91 [00741] [correction]
Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Déterminant par blocs

Exercice 92 [03129] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible et que C et D commutent. Etablir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

Exercice 93 [03130] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec D inversible. Etablir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

Exercice 94 Mines-Ponts MP [02694] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Exercice 95 Centrale MP [02387] [correction]
a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.
c) Trouver un contre-exemple à b) si A et B ne commutent pas.
d) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Exercice 96 [01424] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.
b) Justifier que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$.

Exercice 97 Centrale PC [00198] [correction]
Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

a) A quelle condition la matrice A est-elle inversible ?
b) Donner son inverse quand cela est possible.

Exercice 98 [00713] [correction]
On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
On écrit la comatrice de M sous une forme analogue

$$\operatorname{com} M = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

avec $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
Vérifier

$$\det A' = \det(M)^{p-1} \det D$$

Exercice 99 [03147] [correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) On suppose C^tD symétrique. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \left(A^tD - B^tC\right)$$

b) On suppose C^tD antisymétrique. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \left(A^tD + B^tC\right)$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Il existe une colonne X telle que $AX \neq 0$ et alors $\text{Im}A = \text{Vect}(AX)$.
$A^2X \in \text{Im}A$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2X = \lambda AX$.
De plus pour $Y \in \ker A$, $A^2Y = 0 = \lambda AY$.
Enfin $\ker A$ et $\text{Vect}(X)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc $A^2 = \lambda A$.

Exercice 2 : [énoncé]
Une matrice X solution commute avec A.
En étudiant l'équation $AX = XA$ coefficients par coefficients, on observe que X est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Pour une telle matrice, l'équation $X^2 = A$ équivaut au système :

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ c^2 = 16 \\ (a+c)x = 1 \\ (b+c)y = 2 \end{cases}$$

Les solutions sont donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ etc...

Exercice 3 : [énoncé]
a) Si A n'est pas inversible alors $\text{rg}A < n$. Or il est possible de construire une matrice nilpotente de rang égal à $\text{rg}A$. Deux matrices étant équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang, on peut conclure que A est équivalente à une matrice nilpotente. La réciproque est immédiate.
b) Si A est inversible alors $f(A)f(A^{-1}) = f(I_n) = 1$ donc $f(A) \neq 0$. Si A n'est pas inversible alors A est équivalente à une matrice nilpotente B. Pour celle-ci, on a $f(B) = 0$ car $f(B^n) = f(B)^n$. Puisqu'on peut écrire $A = PBQ$ avec P et Q inversibles, on peut conclure $f(A) = 0$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) $S_N(x)^2 - 1 - x = S_N(x)^2 - S(x)^2 = R_N(x)(S(x) + S_N(x))$ est une série entière dont le premier terme non nul est au moins un x^{N+1}. D'autre part $(S_N(x))^2 - 1 - x$ est un polynôme.
b) Pour N tel que $A^N = 0$, $(S_N(A))^2 - I - A = O_n$ donc $B = S_N(A)$ convient.

Exercice 5 : [énoncé]
a) $DE_{i,j} = a_iE_{i,j}$ et $E_{i,j}D = a_jE_{i,j}$ donc $\varphi(E_{i,j}) = (a_i - a_j)E_{i,j}$.
Posons $I = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 / a_i \neq a_j\right\}$ et
$J = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 / a_i = a_j\right\} = [\![1,n]\!]^2 \setminus I$.
Pour $(i,j) \in I$, $E_{i,j} \in \text{Im}\varphi$ et pour $(i,j) \in J$, $E_{i,j} \in \ker\varphi$.
Ainsi $\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in I\} \subset \text{Im}\varphi$ et $\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in J\} \subset \ker\varphi$.
Or
$\dim\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in I\} + \dim\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in J\} = n^2 = \dim\text{Im}\varphi + \dim\ker\varphi$
donc $\dim\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in I\} = \dim\text{Im}\varphi$ et
$\dim\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in J\} = \dim\ker\varphi$,
puis $\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in I\} = \text{Im}\varphi$ et $\text{Vect}\{E_{i,j}/(i,j) \in J\} = \ker\varphi$.
b) Si D est à coefficients diagonaux distincts alors $I = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 / i \neq j\right\}$ et $J = \{(i,i)/i \in [\![1,n]\!]\}$. Par suite $\text{Im}\varphi$ est l'espace des matrices de diagonale nulle tandis que $\ker\varphi$ est l'espace des matrices diagonales.

Exercice 6 : [énoncé]
a) Supposons $M^2 \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ et $\text{Vect}(I_n)$ étant supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut écrire $M = A + \lambda I_n$ avec $A \in \mathcal{A}$. On a alors $M^2 = A^2 + 2\lambda AI_n + \lambda^2 I_n$ d'où l'on tire $\lambda^2 I_n \in \mathcal{A}$ puis $\lambda = 0$ ce qui donne $M \in \mathcal{A}$.
Pour $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0 \in \mathcal{A}$ donc $E_{i,j} \in \mathcal{A}$ puis $E_{i,i} = E_{i,j} \times E_{j,i} \in \mathcal{A}$. Par suite $I_n = E_{1,1} + \cdots + E_{n,n} \in \mathcal{A}$. Absurde.
b) Formons une équation de l'hyperplan $\mathcal{A}$ de la forme $ax + by + cz + dt = 0$ en la matrice inconnue $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$. Cette équation peut se réécrire $\text{tr}(AM) = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
Puisque $I_2 \in \mathcal{A}$, on a $\text{tr}A = 0$. Soit λ une valeur propre de A.
Si $\lambda \neq 0$ alors $-\lambda$ est aussi valeur propre de A et donc A est diagonalisable via une matrice P.
On observe alors que les matrices M de $\mathcal{A}$ sont celles telles que $P^{-1}MP$ a ses coefficients diagonaux égaux.

Mais alors pour $M = P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $N = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ on a $M, N \in \mathcal{A}$ alors que $MN \in \mathcal{A}$.
Si $\lambda = 0$ alors A est trigonalisable en $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$ via une matrice P.
On observe alors que les matrices M de $\mathcal{A}$ sont celles telles que $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure. L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme comme voulu.

Exercice 7 : [énoncé]
Supposons A inversible. Puisque A et B commutent, A^{-1} et B aussi. Comme B est nilpotente, $-A^{-1}B$ l'est aussi. Or il est classique d'observer que si N est nilpotente, $I - N$ est inversible d'inverse $I + N + \cdots + N^{p-1}$ avec p l'ordre de nilpotence de N. Ainsi $I + A^{-1}B$ est inversible et $A + B = A(I + A^{-1}B)$ aussi.
Supposons $A + B$ inversible, puisque $-B$ est nilpotente et commute avec $A + B$, $A = A + B - B$ est inversible.

Exercice 8 : [énoncé]
$A^{-1}B = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}(AB)A^{-1} = BA^{-1}$.

Exercice 9 : [énoncé]
a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour $i \neq j$, on a $E_{i,j}M = ME_{i,j}$.
L'égalité des coefficients d'indice (i, i) donne $m_{j,i} = 0$.
L'égalité des coefficients d'indice (i, j) donne $m_{j,j} = m_{i,i}$.
Par suite la matrice M est scalaire. La réciproque est immédiate.
b) On reprend l'étude ci-dessus en étudiant la commutation de M avec $I_n + E_{i,j}$ qui conduit à nouveau à l'égalité $E_{i,j}M = ME_{i,j}$. On obtient la même conclusion.

Exercice 10 : [énoncé]
En étudiant l'égalité $AM = MA$, on justifie $C(A) = D_n(\mathbb{C})$. $C(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension n. De plus il contient évidemment les éléments A^k pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ (et, plus généralement, tout polynôme en A).
Supposons

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n-1}A^{n-1} = 0$$

Le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-1}X^{n-1}$ est annulateur de A, donc les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ qui sont valeurs propres de A sont aussi racines de P qui possède alors plus de racines que son degré. On peut alors affirmer $P = 0$ puis $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.
La famille $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une famille libre à n éléments de $C(A)$, c'en est donc une base

Exercice 11 : [énoncé]
a) L'inclusion $\supset$ est immédiate.
Inversement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$.
Pour $M = I_n + E_{i,j}$, la relation $AM = MA$ donne

$$AE_{i,j} = E_{i,j}A$$

L'indentification des coefficients d'indices (i, j) et (j, j) donnent respectivement

$$a_{i,i} = a_{j,j} \text{ et } a_{j,i} = 0$$

On en déduit que la matrice A est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont égaux, autrement dit, A est une matrice scalaire.
b) Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On peut écrire

$$A = (AB^{-1})B$$

et donc

$$A = B(AB^{-1})$$

On en déduit

$$AB = BA$$

et ainsi la matrice A commute avec toute matrice inversible. On peut alors conclure que A est une matrice scalaire.

Exercice 12 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \geqslant 1$.
La propriété est immédiate pour $n = 1$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.
Soit $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure commutant avec sa transposée.
On peut écrire

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tX \\ O_{n,1} & S \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.

L'identification du coefficient d'indice $(1,1)$ dans la relation ${}^tTT = T^tT$ donne

$$\alpha^2 = \alpha^2 + {}^tXX$$

On en déduit $X = O_{n,1}$ et l'égalité ${}^tTT = T^tT$ donne alors ${}^tSS = S^tS$.
Par hypothèse de récurrence, la matrice S est diagonale et par conséquent la matrice T l'est aussi.
Récurrence établie.

Exercice 13 : [énoncé]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice commutant avec toutes les matrices symétriques.
Soient $i < j \in \{1, \ldots, n\}$.
La matrice A commute avec la matrice symétrique $E_{i,j} + E_{j,i}$ ce qui permet d'écrire

$$A(E_{i,j} + E_{j,i}) = (E_{i,j} + E_{j,i})A$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne

$$a_{i,i} = a_{j,j}$$

La matrice A commute avec la matrice symétrique $E_{i,i}$ ce qui permet d'écrire

$$AE_{i,i} = E_{i,i}A$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne

$$a_{i,j} = 0$$

On en déduit que la matrice A est de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 14 : [énoncé]
Cas $n = 2$
Les matrices antisymétriques sont colinéaires à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En étudiant la commutation d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec cette dernière, on obtient que les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commutant avec les matrices antisymétriques sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Cas $n \geqslant 3$
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice commutant avec toutes les matrices antisymétriques.
Soient $i < j \in \{1, \ldots, n\}$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$ avec $k \neq i, j$.
La matrice A commute avec la matrice antisymétrique $E_{i,j} - E_{j,i}$ ce qui permet d'écrire

$$A(E_{i,j} - E_{j,i}) = (E_{i,j} - E_{j,i})A$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) et (k,j) donne

$$a_{i,i} = a_{j,j} \text{ et } a_{k,i} = 0$$

On en déduit que la matrice A est de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 15 : [énoncé]
a) A est équivalente à la matrice $J_1 = \operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0)$ donc il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = PJ_1Q$.
Pour $C = {}^t(1, 0, \ldots, 0)$, on a $J_1 = C^tC$ donc $A = X^tY$ avec $X = PC$ et $Y = {}^tQC$.
b) $A^2 = X({}^tYX)^tY$. ${}^tYX$ est un scalaire λ donc $A^2 = X\lambda^tY = \lambda X^tY = \lambda A$.

Exercice 16 : [énoncé]
a) On a

$$\operatorname{rg}(AB) = 2 \leqslant \min(\operatorname{rg}A, \operatorname{rg}B) \leqslant 2$$

donc

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = 2$$

b) On a $ABAB = AB$ donc $A(BA - I_2)B = O_3$.
On en déduit $\operatorname{Im}((BA - I_2)B) \subset \ker A = \{0\}$ donc $(BA - I_2)B = O_{2,3}$.
Par suite $\operatorname{Im}B \subset \ker(BA - I_2)$ or B est surjective donc $BA - I_2 = O_2$ puis

$$BA = I_2$$

Exercice 17 : [énoncé]
On a $A(BA - I_2)B = 0$.
Or puisque A est de rang 2, $\ker A = \{0\}$ et donc $(BA - I_2)B = 0$.
De plus, puisque B est de rang 2, $\operatorname{Im}B = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc $BA - I_2 = 0$.

Exercice 18 : [énoncé]
La matrice est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r} \end{pmatrix}$ et donc il existe des matrices P, Q inversibles vérifiant $A = QJ_rP$. Par suite
$ABA = O_n \Leftrightarrow J_rPBQJ_r = O_n$. Via l'isomorphisme $B \mapsto PBQ$, l'espace $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/ABA = O_n\}$ est isomorphe à $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/J_rMJ_r = O_n\}$.
En écrivant la matrice M par blocs, on vérifie que les matrices M vérifiant $J_rMJ_r = O_n$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} O_r & \star \\ \star & \star \end{pmatrix}$. On en déduit
$\dim\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/ABA = O_n\} = n^2 - r^2$.

Exercice 19 : [énoncé]
a) Posons $r = \mathrm{rg}A$ et $s = \mathrm{rg}B$. Les matrices A et B sont respectivement équivalentes aux matrices

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,t} & O_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } J_s = \begin{pmatrix} I_s & O_{s,n-s} \\ O_{n-s,t} & O_{n-s} \end{pmatrix}$$

Il existe donc $P, Q, R, S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$PAQ = J_r \text{ et } RBS = J_s$$

et alors

$$PAQ + RBS = J_r + J_s$$

qui est une matrice de rang $\min(n, r+s)$.
On peut aussi écrire

$$(R^{-1}P)A + B(SQ^{-1}) = R^{-1}(J_r + J_s)Q^{-1}$$

et en posant $U = R^{-1}P$ et $V = SQ^{-1}$, on obtient $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{rg}(UA + BV) = \min(n, r+s)$$

b) Si $r + s \geqslant n$ alors $\min(n, r+s) = n$ et ce qui précède conduit à une matrice inversible.

Exercice 20 : [énoncé]
a) ($\Rightarrow$) Supposons $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \mid B \end{pmatrix} = \mathrm{rg}A = r$.
Rappelons que le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes.
Puisque $\mathrm{rg}A = r$, la matrice A possède r colonnes indépendantes.
Puisque $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \mid B \end{pmatrix} = r$, les colonnes de $\begin{pmatrix} A \mid B \end{pmatrix}$ sont toutes combinaisons linéaires des colonnes précédentes.
En particulier les colonnes de B sont combinaisons linéaires des colonnes de A.
Ceci permet de former $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $B = AU$.
($\Leftarrow$) Supposons $B = AU$.
Les colonnes de B sont combinaisons linéaires des colonnes de A et donc par opérations sur les colonnes

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \mid B \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \mid O_n \end{pmatrix} = \mathrm{rg}A$$

b) Il suffit de transposer le raisonnement qui précède en raisonnant sur les lignes et en exploitant que le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille des ses lignes.
c) Supposons

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{rg}A$$

Puisque

$$\mathrm{rg}A \leqslant \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \mid B \end{pmatrix} \leqslant \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{rg}A$$

on a

$$\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \mid B \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \mid B \end{pmatrix}$$

En vertu de a) il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = AU$$

En raisonnant comme en b), il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\begin{pmatrix} C \mid D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} VA \mid VB \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}$$

Inversement, supposons

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}$$

Les n dernières lignes étant combinaisons linéaires des n premières, on a

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ O_n & O_n \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \mid AU \end{pmatrix}$$

puis

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ O_n & O_n \end{pmatrix} = \mathrm{rg}A$$

Exercice 21 : [énoncé]
Commençons par noter que le neutre multiplicatif de G n'est pas nécessairement I_n. Par exemple, $G = \{O_n\}$ est un groupe multiplicatif formé d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Notons J le neutre du groupe G. Soit $A \in G$.
D'une part $AJ = A$ donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(AJ) \leqslant \text{rg}(J)$.
D'autre part, il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = J$ donc $\text{rg}(J) = \text{rg}(AB) \leqslant \text{rg}(A)$.
Finalement $\forall A \in G, \text{rg}(A) = \text{rg}(J)$.

Exercice 22 : [énoncé]
a) Si A est inversible alors en posant

$$C = \begin{pmatrix} O_n & A^{-1} \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

on obtient $BC = I_{2n}$ et on en déduit que B est inversible et que C est son inversible en vertu du théorème d'inversibilité.
Si A n'est pas inversible alors les lignes de A sont liées et les n premières lignes de B sont aussi liées par la même relation linéaire. On en déduit que B n'est pas inversible.
b) On obtient

$$B^{2p} = \begin{pmatrix} O_n & A^p \\ A^p & O_n \end{pmatrix} \text{ et } B^{2p+1} = \begin{pmatrix} O_n & A^{p+1} \\ A^p & O_n \end{pmatrix}$$

Exercice 23 : [énoncé]
Posons $r = \text{rg}A$ et $s = \text{rg}B$. Les matrices A et B sont respectivement équivalentes aux matrices

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,t} & O_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } J_s = \begin{pmatrix} I_s & O_{s,p-s} \\ O_{p-s,t} & O_{p-s} \end{pmatrix}$$

Il existe donc $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $R, S \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$PAQ = J_r \text{ et } RBS = J_s$$

En opérant par blocs, on a alors

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & O \\ O & J_s \end{pmatrix}$$

avec les facteurs

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix}$$

inversibles.
On en déduit

$$\text{rg}M = \text{rg}\begin{pmatrix} J_r & O \\ O & J_s \end{pmatrix} = r + s$$

Exercice 24 : [énoncé]
En multipliant par la matrice inversible

$$\begin{pmatrix} I_n & -B \\ O_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\text{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix}$$

En posant $r = \text{rg}C$, on peut écrire $PCQ = J_r$ avec

$$P, Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ et } J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{p-r,r} & O_{p-r} \end{pmatrix}$$

En multipliant à gauche et à droite par les matrices inversibles

$$\begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & P \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & Q \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\text{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & J_r \end{pmatrix} = n + r$$

Exercice 25 : [énoncé]
L'implication $(\Leftarrow)$ est immédiate car $\text{rg}B = p$.
Inversement, supposons $\text{rg}M = p$.
Puisque B est inversible, les p dernières lignes de M sont indépendantes et donc les autres lignes de M sont combinaisons linéaires de celles-ci puisque $\text{rg}M = p$.
Puisque les n premières lignes de M sont combinaisons linéaires des p dernières lignes de M, on a

$$A = O_n$$

Exercice 26 : [énoncé]
Introduisons la matrice inversible

$$M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_{p,q} \\ O_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$$

On a $\mathrm{rg}M = \mathrm{rg}(MM')$ avec

$$MM' = \begin{pmatrix} I_p & B \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix}$$

Par opérations élémentaires sur les colonnes, la matrice MM' a le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} I_p & O_{p,q} \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix}$$

Enfin, les opérations élémentaires déterminant le rang de C se transposent à la matrice en cours afin d'en donner le rang. Au final

$$\mathrm{rg}M = p + \mathrm{rg}C$$

Exercice 27 : [énoncé]
a) Notons $\mathrm{Im}M = \{MZ/Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$.
Considérons ensuite φ l'application linéaire qui à $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ associe $M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}$.
On a évidemment $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathrm{Im}M$.
Or l'application linéaire φ est injective car A est inversible et donc $\mathrm{rg}\varphi = \dim \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$.
Puisque par hypothèse $\mathrm{rg}M = r$, par inclusion et égalité des dimensions, on a $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}M$.
Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, on a $M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}M$ donc il existe $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ (et celui-ci est même unique) tel que $M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = \varphi(X) = M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$.
b) La relation $M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} BY \\ DY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}BY$ puis $DY = CX = CA^{-1}BY$.
Puisque cette dernière relation vaut pour toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, on peut conclure $D = CA^{-1}B$.

Exercice 28 : [énoncé]
On peut écrire la matrice M^{-1} sous la forme

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

La relation $MM^{-1} = I_{2n}$ donne alors le système

$$\begin{cases} AA' + BC' = I_n \\ CA' + DC' = O_n \\ AB' + BD' = O_n \\ CB' + DD' = I_n \end{cases}$$

qui entraîne

$$\begin{cases} (A - BD^{-1}C)A' = I_n \\ C' = -D^{-1}CA' \\ B' = -A^{-1}BD' \\ (D - CA^{-1}B)D' = I_n \end{cases}$$

On en déduit que les matrices $A - BD^{-1}C$ et $D - CA^{-1}B$ sont nécessairement inversible et A' et D' sont leurs inverses respectifs.
Au final

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1} \\ D^{-1}C(BD^{-1}C - A)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 29 : [énoncé]
a) Pour $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\varphi(X^k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} X^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i = (X+1)^k$$

On en déduit

$$\varphi(P) = P(X+1)$$

b) $\varphi^m(P) = P(X+m)$ donc

$$\varphi(X^k) = (X+m)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i} m^{k-i} X^i$$

d'où

$$A^m = (m^{j-i} a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$$

c) $\varphi^{-1}(P) = P(X-1)$ donc

$$\varphi^{-1}(X^k) = (X-1)^k$$

d'où

$$A^{-1} = ((-1)^{j-i} a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$$

Exercice 30 : [énoncé]
Posons $x = \mathrm{Re}(a)$ et $y = \mathrm{Im}(a)$.
$f(1) = 1 + x + iy$ et $f(i) = i - ai = y + i(1 - x)$.
La matrice de f dans la base $(1, i)$ est donc $\begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix}$.
Si $|a| \neq 1$ alors $\det f \neq 0$. $\mathrm{Im} f = \mathbb{C}$ et $\ker f = \{0\}$.
Si $|a| = 1$ alors $\det f = 0$ et $f \neq 0$. f est un endomorphisme de rang 1.
On a $f(\mathrm{e}^{i\theta/2}) = 2\mathrm{e}^{i\theta/2}$ et $f(\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)/2}) = 0$ donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left\{\mathrm{e}^{i\theta/2}\right\}$ et $\ker f = i\mathrm{Im} f$.

Exercice 31 : [énoncé]
a) On vérifie aisément que la famille $\mathcal{B}'$ est libre et c'est donc une base de E.
$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + \varepsilon_1$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

b) Par récurrence

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis $A^n = PB^nP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & n & n+1 \end{pmatrix}$$

Exercice 32 : [énoncé]
a) On vérifie aisément que la famille $\mathcal{B}'$ est libre et c'est donc une base de E.
$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

b) $B = I_3 + J$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque I_3 et J commutent la formule du binôme donne

$$B^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

car $J^k = O_3$ pour $k \geqslant 3$.
Par formule de changement de base, on obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+3)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \\ -n & n+1 & n \\ -\frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & 1 + \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 33 : [énoncé]
Soit f solution. La matrice de f relative à la base canonique est à coefficients entiers. De plus f est un automorphisme car les vecteurs de la base canonique sont des valeurs prises par f et comme $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$, la matrice de f^{-1} relative à la base canonique est à coefficients entiers. Inversement, si f est un automorphisme telle que f et f^{-1} soient représentés par des matrices à coefficients entiers dans la base canonique, il est immédiat que $f(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ et que $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ donc que $\mathbb{Z}^n \subset f(\mathbb{Z}^n)$ et finalement $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Notons que les endomorphismes solutions peuvent aussi se décrire comme étant les endomorphismes canoniquement représentés par une matrice à coefficients entiers et qui sont de déterminant égal à 1.

Exercice 34 : [énoncé]
Si $f = 0$ alors $f \circ g = 0$.
Sinon il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
La matrice de g commutant avec f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et puisque $g^2 = 0$, $a = 0$.
Par suite la matrice de $f \circ g$ est nulle.

Exercice 35 : [énoncé]
F_ω est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Sa matrice dans la base $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ est $A = (a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n-1}$ avec $a_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{ij}$. On remarque que $\bar{A}A = I_n$ car $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(j-i)k} = \delta_{i,j}$. Par suite F_ω est un automorphisme et F_ω^{-1} étant représenté par $\bar{A}$, $F_\omega^{-1}(P) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}P(\omega^{-k})X^k$.

Exercice 36 : [énoncé]
a) S'il existe w tel que $u = w\circ v$ alors pour tout $x \in \ker v$,
$u(x) = (w\circ v)(x) = w(v(x)) = w(0) = 0$ et donc $x \in \ker u$. Ainsi $\ker v \subset \ker u$.
Inversement, supposons $\ker v \subset \ker u$.
Soit H un supplémentaire de $\ker v$ dans $\mathbb{R}^p$: $H \oplus \ker v = \mathbb{R}^p$.
On sait que la restriction $v_{\restriction H}$ de v au départ de H est un isomorphisme de H vers l'image de v.
Soit K un supplémentaire de $\mathrm{Im}v$ dans $\mathbb{R}^n$: $K \oplus \mathrm{Im}v = \mathbb{R}^n$.
Considérons ensuite w_0 l'application linéaire définie par

$$\forall x \in \mathrm{Im}v, w_0(x) = u(v_{\restriction H}^{-1}(x)) \text{ et } \forall x \in K, w_0(x) = 0$$

D'une part, pour tout $x \in \ker v$, $(w_0\circ v)(x) = w_0(0) = 0 = u(x)$ car $\ker v \subset \ker u$.
D'autre part, pour tout $x \in H$,
$(w_0 \circ v)(x) = (w_0 \circ v_{\restriction H})(x) = \left(u\circ v_{\restriction H}^{-1}\circ v_{\restriction H}\right)(x) = u(x)$
Puisque les applications linéaires $w_0\circ v$ et u coïncident sur les sous-espaces vectoriels supplémentaires $\ker v$ et H, c'est deux applications sont égales et on peut donc écrire

$$u = w_0 \circ v$$

Soit $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.
w est solution de l'équation $u = w\circ v$ si, et seulement si, $w\circ v = u = w_0\circ v$ soit encore $(w - w_0)\circ v = 0$.
Or $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}g \subset \ker f$ donc $u = w\circ v \Leftrightarrow \mathrm{Im}v \subset \ker(w - w_0)$.
Par suite les solutions de l'équation $u = w\circ v$ sont de la forme $w_0 + f$ avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ vérifiant $\mathrm{Im}v \subset \ker f$.
b) On définit les matrices étudiées :

```
A:=matrix(3,3,[-2,1,1,8,1,-5,4,3,-3]);
B:=matrix(3,3,[1,2,-1,2,-1,-1,-5,0,3]);
```

On détermine les noyaux de celles-ci

```
kernel(A);
kernel(B);
```

On observe que ces noyaux sont égaux à $\mathrm{Vect}\left((3,1,5)\right)$ et donc $\ker B \subset \ker A$. Par l'étude qui précède transposée aux matrices, on peut affirmer que l'équation étudiée possède au moins une solution.
Pour construire une solution à cette équation, il suffit d'introduire une matrice B_0 inversible coïncidant avec B sur un supplémentaire de $\ker B$ et de considérer $C_0 = AB_0^{-1}$.
En prenant pour supplémentaire de $\ker B$ l'espace $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$, la matrice

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

convient. Définissons-la et calculons C_0 :

```
B0:=matrix(3,3,[1,2,0,2,-1,0,-5,0,1]);
C0:=evalm(A&*B0^(-1));
```

On obtient

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier l'exactitude de cette solution par le calcul

```
evalm(A-C0&*B);
```

Les autres matrices solutions se déduisent de C_0 par ajout d'une matrice E telle que $\mathrm{Im}B \subset \ker E$. On détermine l'image de B

```
colspace(B);
```

On obtient $\mathrm{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,-2)\right)$
La condition $\mathrm{Im}B \subset \ker E$ donne les relations $C_1 = C_3$ et $C_2 = 2C_3$ sur les colonnes de E qui est donne une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 2a & a \\ b & 2b & b \\ c & 2c & c \end{pmatrix}$$

c) Il existe C tel que $A = CB$ si, et seulement si, $\ker B \subset \ker A$ ce qui équivaut à la condition $AX = 0$ avec $X = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Cela donne la condition $3C_1 + C_2 + 5C_3 = 0$ sur les colonnes de A.

Si cette condition est remplie, l'étude qui précède donne que les solutions de l'équation $A = CB$ sont les matrices de la forme

$$AB_0^{-1} + \begin{pmatrix} a & 2a & a \\ b & 2b & b \\ c & 2c & c \end{pmatrix}$$

d) Si $u = w_1 \circ v_1 + w_2 \circ v_2$ alors il est immédiate que $\ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$.
Inversement, supposons $\ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$.
Considérons $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{2n})$ déterminé par $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$.
Puisque $\ker v = \ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$, l'étude qui précède assure l'existence de $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^q)$ vérifiant $u = w \circ v$. Posons alors $w_1 : y_1 \in \mathbb{R}^n \mapsto w(y_1, 0_{\mathbb{R}^n})$ et $w_2 : y_2 \in \mathbb{R}^n \mapsto w(0_{\mathbb{R}^n}, y_2)$.
$w_1, w_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ et vérifient $w(y_1, y_2) = w_1(y_1) + w_2(y_2)$ de sorte que $u = w \circ v$ donne $u = w_1 \circ v_1 + w_2 \circ v_2$

Exercice 37 : [énoncé]
Soit $x \notin \ker f^{n-1}$. Un tel x existe puisque $f^{n-1} \neq 0$.
Considérons $\mathcal{B} = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$.
Supposons $\lambda_{n-1} f^{n-1}(x) + \cdots + \lambda_1 f(x) + x = 0$.
En y appliquant successivement $f^{n-1}, \dots, f, \mathrm{Id}$ on obtient $\lambda_0 = 0, \dots, \lambda_{n-2} = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0$ car $f^{n-1}(x) \neq 0$.
$\mathcal{B}$ est une famille libre formée de $n = \dim E$ vecteurs, c'est donc une base de E.
De plus $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme convenable.

Exercice 38 : [énoncé]
Posons $r = \mathrm{rg} f$ et $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ une base de $\mathrm{Im} f$.
Puisque $f^2 = 0$, la famille $\mathcal{B} = (f(e_1), \dots, f(e_r))$ est formée de vecteurs de $\ker f$, de plus elle est libre, on peut donc la compléter en une base de la forme $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_r), \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p)$ avec $p = \dim \ker f$.
Considérons $\mathcal{C} = (f(e_1), \dots, f(e_r), \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_r)$.
En vertu du théorème du rang, cette famille est formée de $\dim E$ vecteurs.
De plus si l'on dispose d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{C}$, en appliquant f et en exploitant la liberté de $\mathcal{B}$, on justifie que les coefficients devant les $e_1, \dots, e_r$ sont nuls. Ensuite, sachant $\mathcal{B}'$ libre, on conclut que les autres coefficients sont nuls. La famille $\mathcal{B}$ est une base et la matrice de f dans $\mathcal{C}$ est de la forme voulue.

Exercice 39 : [énoncé]
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B}$ et u l'endomorphisme de E représenté par la matrice A dans $\mathcal{B}$. On a $u^2 = 0$ et $u \neq 0$.
Notons que cela entraîne $\dim \mathrm{Im} u = 1$ et $\dim \ker u = 2$.
Cherchons une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = B$. Après analyse du problème : Considérons $\varepsilon_1 \notin \ker(u)$ et $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$. ε_2 est un vecteur non nul de $\ker u$ qui peut être complétée en une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\ker u$. Formons $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Si $\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 = 0$ alors en appliquant u, $\lambda_1 u(\varepsilon_1) = 0$ donc $\lambda_1 = 0$ puis $\lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 = 0$ entraîne $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ puisque $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre.
Finalement la famille $\mathcal{B}'$ est libre et c'est donc bien une base de E. La matrice de u dans cette base est bien la matrice B. On peut conclure.

Exercice 40 : [énoncé]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.
On vérifie $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
Soit $x \notin \ker f^{n-1}$. Un tel x existe puisque $f^{n-1} \neq 0$.
Considérons $\mathcal{B}' = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$.
Supposons

$$\lambda_{n-1} f^{n-1}(x) + \cdots + \lambda_1 f(x) + x = 0$$

En y appliquant successivement $f^{n-1}, \dots, f, \mathrm{Id}$ on obtient $\lambda_0 = 0, \dots, \lambda_{n-2} = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0$ car $f^{n-1}(x) \neq 0$.
$\mathcal{B}'$ est une famille libre formée de $n = \dim E$ vecteurs, c'est donc une base de E.
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est égale à $\mathcal{B}$ donc A et B sont semblables.

Exercice 41 : [énoncé]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.
On observe que $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.
Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette supplémentarité, la matrice de f est de la forme $B = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec A' matrice de taille r. De plus $r = \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B = \mathrm{rg} A'$ donc A' est inversible.

Exercice 42 : [énoncé]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.
On observe $r = \mathrm{rg} f$, $f \neq 0$ et $f^2 = 0$ de sorte que $\mathrm{Im} f \subset \ker f$.
Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de Imf complétée en $(e_1, \dots, e_{n-r})$ base de $\ker f$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, il existe e_{n-r+i} vecteur de E tel que $f(e_{n-r+i}) = e_i$.

Montrons que $(e_1,\dots,e_n)$ est libre.
Supposons
$\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_r e_r+\lambda_{r+1}e_{r+1}+\dots+\lambda_{n-r}e_{n-r}+\lambda_{n-r+1}e_{n-r+1}+\dots+\lambda_n e_n=0$ (1).
En appliquant f à la relation (1), on obtient $\lambda_{n-r+1}e_1+\dots+\lambda_n e_r=0$ et donc $\lambda_{n-r+1}=\ldots=\lambda_n=0$ car $(e_1,\dots,e_r)$ libre.
La relation (1) devient $\lambda_1e_1+\dots+\lambda_re_r+\lambda_{r+1}e_{r+1}+\dots+\lambda_{n-r}e_{n-r}=0$ et donc $\lambda_1=\ldots=\lambda_{n-r}=0$ car $(e_1,\dots,e_{n-r})$ libre.
La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre et formée de $n=\dim E$ vecteurs de E c'est donc une base de E et la matrice de f dans celle-ci est égale à B. On peut conclure que A et B sont semblables.

Exercice 43 : [énoncé]
Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
Analyse : Cherchons une base (e_1,e_2,e_3) telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

On a alors $f(e_1)=0$, $f(e_2)=e_3$ et $f(e_3)=-e_2$. On en déduit $e_1\in\ker f$, $e_2\in\ker(f^2+\mathrm{Id})$ et $e_3=f(e_2)$.
Synthèse : L'endomorphisme f vérifie $f\circ(f^2+\mathrm{Id})=0$. Par l'absurde, si f est inversible alors $f^2+\mathrm{Id}=0$ et donc $\det(f^2)=\det(-\mathrm{Id})=-1$. Or $\det(f^2)=(\det f)^2\geqslant 0$. C'est absurde. On en déduit $\ker f\neq\{0\}$. Soit e_1 un vecteur non nul de $\ker f$.
Puisque $(f^2+\mathrm{Id})\circ f=0$, on a$\mathrm{Im}f\subset\ker(f^2+\mathrm{Id})$. Or $f\neq 0$ donc $\mathrm{Im}f\neq\{0\}$ puis $\ker(f^2+\mathrm{Id})\neq\{0\}$.
Soit e_2 un vecteur non nul de $\ker(f^2+\mathrm{Id})$ et $e_3=f(e_2)$. On vérifie$f(e_3)=f^2(e_2)=-e_2$.
Il reste à observer que la famille (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Supposons $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3=0$ (1) avec $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$.
En appliquant deux fois f à cette relation, on obtient $\lambda_2e_3-\lambda_3e_2=0$ (2) et $-\lambda_2e_2-\lambda_3e_3=0$ (3).
La combinaison d'équations $\lambda_3(2)+\lambda_2(3)$ donne $(\lambda_3^2+\lambda_2^2)e_2=0$. Puisque le vecteur e_2 a été choisi non nul, on en déduit $\lambda_2=\lambda_3=0$ puis la relation (1) donne $\lambda_1=0$ puisque le vecteur e_1 a été choisi non nul.
Finalement, (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de f dans celle-ci est celle voulue.
On peut conclure que A est semblable à la matrice proposée.

Exercice 44 : [énoncé]
Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M.
Analyse : Cherchons une base (e_1,e_2,e_3,e_4) telle que :
$f(e_1)=e_2, f(e_2)=-e_1, f(e_3)=e_4$ et $f(e_4)=-e_3$.
La connaissance de e_1 et e_3 suffit pour former e_2 et e_4 avec les quatre relations voulues.
Synthèse :
Prenons $e_1\neq 0$, $e_2=f(e_1)$, $e_3\notin\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ et $e_4=f(e_3)$.
Supposons $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4=0$ i.e. $\lambda_1e_1+\lambda_2f(e_1)+\lambda_3e_3+\lambda_4f(e_3)=0$ (1).
En appliquant l'endomorphisme f : $\lambda_1f(e_1)-\lambda_2e_1+\lambda_3f(e_3)-\lambda_4e_3=0$ (2).
$\lambda_3(1)-\lambda_4(2)$ donne $(\lambda_3\lambda_1+\lambda_2\lambda_4)e_1+(\lambda_3\lambda_2-\lambda_4\lambda_1)f(e_1)+(\lambda_3^2+\lambda_4^2)e_3=0$.
Puisque $e_3\notin\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$, on a $\lambda_3^2+\lambda_4^2=0$ d'où $\lambda_3=\lambda_4=0$.
(1) et (2) donne alors $\lambda_1e_1+\lambda_2f(e_1)=0$ et $\lambda_1f(e_1)-\lambda_2e_1=0$.
Comme ci-dessus on parvient à $\lambda_1^2+\lambda_2^2=0$ d'où $\lambda_1=\lambda_2=0$.
Finalement (e_1,e_2,e_3,e_4) est une base convenable. On peut conclure que M est semblable à la matrice proposée.

Exercice 45 : [énoncé]
Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^\star$.
Pour $n=1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n\geqslant 1$.
Soient $A\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^{n+1})$ l'endomorphisme canoniquement associé.
Si f est une homothétie vectorielle alors $f=0$ car $\mathrm{tr}f=0$. On conclut.
Sinon, il existe un vecteur x tel que $f(x)$ ne soit pas colinéaire à x. En représentant f dans une base dont x et $f(x)$ sont les deux premiers vecteurs, on obtient que A est semblable à la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c}0&\star\\\hline\star&A'\end{array}\right)$$

avec $A'\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.
Par hypothèse de récurrence, il existe P inversible tel que $P^{-1}A'P$ soit de diagonale nulle et en considérant la matrice inversible

$$Q=\left(\begin{array}{c|c}1&0\\\hline 0&P\end{array}\right)$$

on obtient que la matrice précédente est semblable à

$$\begin{pmatrix}0&&\star\\&\ddots&\\\star&&0\end{pmatrix}$$

Récurrence établie.

Exercice 46 : [énoncé]
a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On a

$$\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} A = 1$$

et donc par la formule du rang

$$\dim \ker f = n - 1$$

Si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à $\ker f$, la matrice de f dans cette base a ses $n-1$ premières colonnes nulles.
b) On peut écrire $A = PBP^{-1}$ avec P matrice inversible et B une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\lambda = \mathrm{tr} B = \mathrm{tr} A$$

Puisque $B^2 = \lambda B$, on a

$$P^{-1}A^2P = \mathrm{tr}(A).P^{-1}AP$$

puis

$$A^2 = \mathrm{tr}(A).A$$

Puisque $\det(I_n + B) = 1 + \lambda$, on a

$$\det(P^{-1})\det(I_n + A)\det P = 1 + \mathrm{tr} A$$

puis

$$\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr} A$$

Exercice 47 : [énoncé]
Posons $D = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$. L'étude, coefficient par coefficient, de la relation $MD = DM$ donne que les matrices commutant avec D sont les matrices diagonales. Parmi les matrices diagonales, celles qui sont semblables à D sont celles qui ont les mêmes coefficients diagonaux

Exercice 48 : [énoncé]
Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $PA = BP$. En posant $Q = \mathrm{Re}(P)$ et $R = \mathrm{Im}(P)$ on obtient $QA + iRA = BQ + iBR$ donc $QA = BQ$ et $RA = BR$ car A, B, Q, R réelles. Cependant on ne sait pas si Q ou R sont inversibles. Or pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(Q + \lambda R)A = B(Q + \lambda R)$ et $\lambda \mapsto \det(Q + \lambda R)$ est une fonction polynomiale non nulle car $\det(Q + iR) \neq 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q + \lambda R$ est inversible et on peut conclure.

Exercice 49 : [énoncé]
Commençons par déterminer $f(I_n)$ et $f(O_n)$.
On a $f(I_n) = f(I_n^2) = f(I_n)^2$ donc $f(I_n) = 0$ ou 1.
Si $f(I_n) = 0$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(A) = f(A \times I_n) = f(A) \times f(I_n) = 0$ et donc f est constante ce qui est exclu. Ainsi $f(I_n) = 1$.
Aussi $f(O_n) = f(O_n^2) = f(O_n) \times f(O_n)$ donc $f(O_n) = 0$ ou 1.
Si $f(O_n) = 1$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$f(A) = f(O_n) \times f(A) = f(O_n \times A) = f(O_n) = 1$ et donc f est constante ce qui est exclu. Ainsi $f(O_n) = 0$.
Si A est inversible alors $f(I_n) = f(A \times A^{-1})$ donne $f(A) \times f(A^{-1}) = 1$ et donc $f(A) \neq 0$.
La réciproque est plus délicate.
Supposons A non inversible et posons $r = \mathrm{rg} A$.
La matrice A est équivalente à la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles. On a alors
$f(A) = f(Q)f(J_r)f(P)$ et il suffit de montrer $f(J_r) = 0$ pour conclure.
Par permutation des vecteurs de bases, la matrice J_r est semblable à toute matrice diagonale où figure r coefficients 1 et $n-r$ coefficients 0. En positionnant, pertinemment les coefficients 0, on peut former des matrices $A_1, \ldots, A_p$ toutes semblables à J_r vérifiant

$$A_1 \ldots A_p = O_n$$

On a alors

$$f(A_1) \ldots f(A_p) = 0$$

Or il est facile d'établir que si deux matrices sont semblables, la fonction f prend les mêmes valeurs sur celles-ci. Par suite $f(J_r) = f(A_1) = \ldots = f(A_p)$ et ainsi $f(J_r)^p = 0$ puis enfin $f(J_r) = 0$.

Exercice 50 : [énoncé]
On vérifie aisément que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car c'est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$.
Puisque $A^2 = O_3$, on a $\mathrm{Im}A \subset \ker A$.
Puisque $A \neq O_3$, la formule du rang et l'inclusion précédente montre

$$\mathrm{rg}A = 1 \text{ et } \dim \ker A = 2$$

Soient $X_1 \in \mathrm{Im}A$ non nul, X_2 tel que (X_1, X_2) soit base de $\ker A$ et X_3 un antécédent de X_1. En considérant la matrice de passage P formée des colonnes X_1, X_2, X_3, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

En raisonnant par coefficients inconnus, on obtient que les matrices N vérifiant $BN = NB$ sont de la forme

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Par suite les matrice M vérifiant $AM = MB$ sont celle de la forme

$$M = P \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}$$

L'espace $\mathcal{C}$ est donc de dimension 5 et l'on en forme une base à l'aide des matrices

$$M_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, M_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, M_3 = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$M_4 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } M_5 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exercice 51 : [énoncé]
De telles matrices n'existent pas car

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

et donc

$$\mathrm{tr}(AB - BA) = 0 \neq \mathrm{tr}(I_n)$$

Exercice 52 : [énoncé]
On a

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$$

car $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
Voyons que plus généralement $\mathrm{tr}(A^p) = 0$.
On a

$$A^2 = A(AB - BA) = A^2B - ABA$$

et

$$ABA = (BA + A)A$$

donc

$$A^2 = A^2B - BA^2 - A^2$$

Ainsi

$$A^2B - BA^2 = 2A^2$$

Par récurrence, on montre

$$A^pB - BA^p = pA^p$$

et on en déduit

$$\mathrm{tr}A^p = 0$$

Exercice 53 : [énoncé]
I) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $e_1, \dots, e_{n-1} \in \ker f$ et $e_n \in \mathrm{Im}f$. On a $f(e_n) \in \mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(e_n)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_n) = \lambda e_n$ et donc $f^2(e_n) = \lambda f(e_n)$. Cette relation vaut aussi pour les vecteurs $e_1, \dots, e_{n-1}$ et donc par coïncidence de deux applications linéaires sur les vecteurs d'une base on peut affirmer que $f^2 = \lambda f$. De plus, la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ donne $\lambda = \mathrm{tr}f$. Ainsi, pour f de rang 1, f est un projecteur si, et seulement si, $\mathrm{tr}f = 1$.

Exercice 54 : [énoncé]
Calculons les coefficients diagonaux de la représentation matricielle de φ dans la base canonique formée des matrices élémentaires $E_{i,j}$.
On a $\varphi(E_{i,j}) = E_{i,j}A$.
Or $A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{k,\ell}$ donc $\varphi(E_{i,j}) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j,\ell}E_{i,\ell}$ car $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.
La composant de $\varphi(E_{i,j})$ selon $E_{i,j}$ vaut $a_{j,j}$.
Par suite la trace de φ vaut $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = n\mathrm{tr}A$.

Exercice 55 : [énoncé]
Supposons que M soit semblable à une matrice M' via une matrice inversible P i.e.

$$M' = P^{-1}MP$$

Si on peut écrire $M' = A'B' - B'A'$ alors $M = AB - BA$ avec $A = PA'P^{-1}$ et $B = PB'P^{-1}$.
On peut ainsi transformer la matrice M en une matrice semblable sans changer la problématique.
Etablissons maintenant le résultat demandé en raisonnant par récurrence sur la taille de la matrice M.
Si M est taille 1 : ok
Supposons la propriété établie au rang $n \in \mathbb{N}^\star$.
Soit M une matrice carrée d'ordre $n+1$ de trace nulle.
Montrons que M est semblable à une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \star \\ \hline \star & \star \end{array}\right)$$

Si M est matrice d'une homothétie alors $\mathrm{tr}M = 0$ permet de conclure $M = O_n$.
Sinon, il existe des vecteurs qui ne sont pas vecteurs propres de l'endomorphisme associé à M.
Soit x, un tel vecteur. En introduisant une base dont x et $f(x)$ sont les deux premiers vecteurs, on obtient que la matrice M est semblable à celle voulue.
Compte tenu de la remarque préliminaire, on suppose désormais que la matrice M est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & M' \end{array}\right)$$

avec $\mathrm{tr}M' = 0$.
Par l'hypothèse de récurrence on peut écrire

$$M' = A'B' - B'A'$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ qui n'est par valeur propre de la matrice B'.
En posant

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & L(B'-\lambda I)^{-1} \\ \hline (\lambda I - B')^{-1}C & A' \end{array}\right)$$

et

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$$

on obtient

$$M = AB - BA$$

Récurrence établie.

Exercice 56 : [énoncé]
Posons $a_{j,i} = \varphi(E_{i,j})$. $\varphi(M) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}m_{i,j} = \mathrm{tr}(AM)$ avec $A = (a_{i,j})$.

Exercice 57 : [énoncé]
Si $i \neq j$ alors $E_{i,i}E_{i,j} = E_{i,j}$ et $E_{i,j}E_{i,i} = 0$ donc $T(E_{i,j}) = 0$.
De plus $E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,i}$ et $E_{j,i}E_{i,j} = E_{j,j}$ donc $T(E_{i,i}) = T(E_{j,j}) = \alpha$.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $T(A) = T\left(\sum\limits_{i,j=1}^n a_{i,j}E_{i,j}\right) = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{i,j}T(E_{i,j}) = \alpha\mathrm{tr}(A)$
donc $T = \alpha.\mathrm{tr}$.

Exercice 58 : [énoncé]
Puisque $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, on a $\mathrm{tr}\,[A,B] = 0$. $\ker(\mathrm{tr})$ est donc un sous-espace vectoriel contenant $\{[A,B]\,/A,B \in E\}$ donc $\mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A,B \in E\} \subset \ker(\mathrm{tr})$.
De plus, tr étant une forme linéaire non nulle, $\ker(\mathrm{tr})$ est un hyperplan. Montrons qu'il en en est de même de $\mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A,B \in E\}$.
Pour $i \neq j$, $E_{i,j} = [E_{i,i}, E_{i,j}]$ et pour $i \neq n$, $E_{i,i} - E_{n,n} = [E_{i,n}, E_{n,i}]$.
Par suite $\mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A,B \in E\}$ contient la famille libre à n^2-1 éléments formée par les $E_{i,j}$, $i \neq j$ et les $E_{i,i} - E_{n,n}$, $i \neq n$. Il en découle que $\mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A,B \in E\}$ est de dimension supérieure ou égale à n^2-1.
Par inclusion et un argument de dimension, on peut conclure $\ker(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}\,\{[A,B]\,/A,B \in E\}$.

Exercice 59 : [énoncé]
Notons que $\mathrm{Vect}\,\{AB - BA/A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$ est inclus dans l'hyperplan des matrices de trace nulle.
Par suite $\dim \mathrm{Vect}\,\{AB - BA/A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\} \leqslant n^2 - 1$.
Pour $A = E_{i,j}$ et $B = E_{j,j}$ (avec $i \neq j$) : $AB - BA = E_{i,j}$.
Pour $A = E_{i,n}$ et $B = E_{n,i}$: $AB - BA = E_{i,i} - E_{n,n} = F_i$.
La famille formée des $E_{i,j}$ et des F_i est libre et constituée de n^2-1 éléments.
Par suite $\dim \mathrm{Vect}\,\{AB - BA/A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\} \geqslant n^2 - 1$.
Finalement $\dim \mathrm{Vect}\,\{AB - BA/A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\} = n^2 - 1$.

Exercice 60 : [énoncé]
Soit X solution. La matrice $X + {}^tX$ est symétrique.
Cas A n'est pas symétrique :

Nécessairement $\mathrm{tr}(X) = 0$ et l'équation étudiée devient $X + {}^tX = 0$ dont les solutions sont les matrices antisymétriques. Inversement, ces dernières sont solutions de l'équation initiale.
Cas A est symétrique.
En passant à la trace l'équation étudiée, on obtient $2\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(A)$.
Si $\mathrm{tr}(A) \neq 2$ alors on obtient à nouveau $\mathrm{tr}(X) = 0$ et on conclut que X est antisymétrique.
Si $\mathrm{tr}(A) = 2$ alors $Y = X - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X)A$ vérifie $Y + {}^tY = X + {}^tX - \mathrm{tr}(X)A = 0$ donc Y est antisymétrique puis la matrice X est de la forme $\lambda A + Y$ avec Y antisymétrique. Inversement, une telle matrice est solution.
Pour résumer :
Si $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{tr}(A) \neq 2$ alors $\mathcal{S} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{tr}(A) = 2$ alors $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(A) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 61 : [énoncé]
a) Soit p un projecteur de E espace de dimension n. En posant $F = \mathrm{Im}p$ et $G = \ker p$, la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & O_{p,r-p} \\ O_{r-p,p} & O_{r-p} \end{pmatrix}$$

On y lit

$$\mathrm{rg}p = r = \mathrm{tr}p$$

b) Posons

$$B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k$$

Puisque $A^q = I_n$, on a $AB = B$ et plus généralement $A^kB = B$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit

$$B^2 = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^kB = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} B = B$$

et donc B est la matrice d'un projecteur. Par suite

$$\mathrm{rg}B = \mathrm{tr}B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{tr}(A^k)$$

Pour $X \in \ker(A - I_n)$, on a $AX = X$ donc $BX = X$ et ainsi $\ker(A - I_n) \subset \mathrm{Im}B$.
Inversement, si $Y \in \mathrm{Im}B$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = AX$ et alors

$$(A - I_n)Y = ABX - BX = BX - BX = 0$$

donc $\mathrm{Im}B \subset \ker(A - I_n)$ puis $\mathrm{Im}B = \ker(A - I_n)$. On peut alors conclure

$$\dim\ker(A - I_n) = \mathrm{rg}B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{tr}(A^k)$$

Exercice 62 : [énoncé]
Soit $p = \frac{1}{n}\sum\limits_{g\in G} g$. On a $p \circ p = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{h\in G}\sum\limits_{g\in G} h \circ g = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{h\in G}\sum\limits_{k\in G} k = \frac{1}{n}\sum\limits_{k\in G} k = p$ donc p est un projecteur et la dimension de $\mathrm{Im}p = \ker(p - \mathrm{Id})$ est $\mathrm{tr}p = \frac{1}{n}\sum\limits_{g\in G} g$. Pour tout $g \in G$, on a $g \circ p = p$ donc si x est invariant par p il est aussi par g. Ainsi $\ker(p - \mathrm{Id}) \subset \bigcap\limits_{g\in G}\ker(g - \mathrm{Id})$. L'inclusion inverse étant immédiate, on conclut
Il est clair que $\bigcap\limits_{g\in G}\ker(g - \mathrm{Id}) = \ker(p - \mathrm{Id})$ puis l'égalité

$$\dim\left(\bigcap_{g\in G}\ker(g - \mathrm{Id}_E)\right) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}g.$$

Exercice 63 : [énoncé]
a) L'application considérée est au départ d'un ensemble infini et à valeurs dans un ensemble fini, elle ne peut donc être injective et il existe $k < \ell \in \mathbb{N}$, $M^k = M^\ell$ ce qui fournit $M^p = I_n$ avec $p = \ell - k$ car M est inversible. On en déduit que $I_n \in H$ et que $M^{-1} = M^{p-1} \in H$. Cela suffit pour conclure que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
b) Si $M \in H$ alors $N \mapsto MN$ et $N \mapsto NM$ sont des permutations de H. On en déduit que $MP = PM = P$ car pour chaque terme les sommes portent sur les mêmes éléments.
$P^2 = \frac{1}{q}\sum\limits_{M\in H} MP = \frac{1}{q}\sum\limits_{M\in H} P = P$.
c) Puisque $P^2 = P$, $\mathrm{Im}P = \ker(P - I_n)$ et $\ker P$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Si $X \in \ker P$ alors $PX = 0$ et pour tout $M \in H$, $PMX = PX = 0$ donc $MX \in \ker P$. Ainsi $\ker P$ est stable par H.
Si $X \in \bigcap\limits_{M\in H}\ker(M - I_n)$ alors pour tout $M \in H$, $MX = X$ donc $PX = X$ puis $X \in \ker(P - I_n)$.
Inversement, si $X \in \ker(P - I_n)$ alors $PX = X$ et pour tout $M \in H$, $X = PX = MPX = MX$ et donc $X \in \bigcap\limits_{M\in H}\ker(M - I_n)$. Ainsi $\bigcap\limits_{M\in H}\ker(M - I_n) = \ker(P - I_n)$ et $\ker P$ est solution du problème posé.

d) P est une projection donc $\mathrm{tr}P = \mathrm{rg}P \in \mathbb{N}$ et donc $\sum\limits_{M\in H} \mathrm{tr}M = q\mathrm{tr}P \in q\mathbb{N}$.
Si $\sum\limits_{M\in H} \mathrm{tr}M = 0$ alors $P = 0$. Par suite $\bigcap\limits_{M\in H} \ker(M - I_n) = \{0\}$ et il n'y a donc pas de vecteur non nul invariant pour tous les éléments de H et inversement.

Exercice 64 : [énoncé]
a) Posons $p = \sum\limits_{g\in G} g$. $p^2 = \sum\limits_{g\in G}\sum\limits_{h\in G} gh$. Or pour $g \in G$, l'application $h \mapsto gh$ est une permutation du groupe G donc $\sum\limits_{h\in G} gh = p$ et par suite $p^2 = \mathrm{Card}G.p$.
Par suite $\frac{1}{\mathrm{Card}G}p$ est une projection vectorielle et puisque son rang égale sa trace, $\mathrm{rg}p = 0$. Ainsi $p = 0$.
b) Considérons $\varphi(x, y) = \sum\limits_{g\in G} (g(x) \mid g(y))$. φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel on a $\forall h \in G, h^\star = h^{-1}$. Pour ce produit scalaire, $V^\perp$ est un supplémentaire de V stable pour tout h^{-1} avec h élément de G donc stable pour tout élément de G.

Exercice 65 : [énoncé]
a) $f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j})$ et si $i \neq j$,
$f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{j,j}) = f(E_{j,j}E_{i,j}) = f(0) = 0$.
Ainsi $f(A) = f(\sum a_{i,j}E_{i,j}) = \lambda\mathrm{tr}A$ en notant λ la valeur commune des $f(E_{i,i})$.
b) Posons $f = \mathrm{tr} \circ g$. f est une forme linéaire vérifiant $f(AB) = f(BA)$ donc $f = \lambda\mathrm{tr}$. Or $f(I) = \mathrm{tr}g(I) = \mathrm{tr}I$ donc $\lambda = 1$. Ainsi $f = \mathrm{tr}$ et $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(g(M)) = \mathrm{tr}(M)$.

Exercice 66 : [énoncé]
La somme des colonnes de B est nulle donc $\det B = 0$.

Exercice 67 : [énoncé]
On a
$$\det(A + iB)\det(A - iB) = \det(A^2 + B^2)$$
car A et B commutent.
Or $\det(A - iB) = \overline{\det(A + iB)}$ donc $\det(A^2 + B^2) = z\bar{z} \geqslant 0$.

Exercice 68 : [énoncé]
Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On observe $\varphi_A(E_{i,j}) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$
Par suite dans la base $(E_{1,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n})$, la matrice de l'endomorphisme φ_A est diagonale pas blocs avec n blocs diagonaux tous égaux à A. On en déduit $\mathrm{tr}\varphi_A = n\mathrm{tr}A$ et $\det\varphi_A = (\det A)^n$.

Exercice 69 : [énoncé]
a) $AA^{-1} = I_n$ donne $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ or $\det A, \det A^{-1} \in \mathbb{Z}$ donc $\det A = \pm 1$.
b) Posons $P(x) = \det(A + xB)$. P est une fonction polynomiale de degré inférieur à n.
Pour tout $x \in \{0, 1, \dots, 2n\}$, on a $P(x) = \pm 1$ donc $P(x)^2 - 1 = 0$.
Le polynôme $P^2 - 1$ possède au moins $2n + 1$ racines et est de degré inférieur à n, c'est donc le polynôme nul.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \pm 1$.
Pour $x = 0$, on obtient $\det A = \pm 1$.
Pour $x \to +\infty$, $\det\left(\frac{1}{x}A + B\right) = \frac{P(x)}{x^n} \to 0$ donne $\det B = 0$.

Exercice 70 : [énoncé]
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de l'espace des colonnes, $\det A = \det_{\mathcal{B}}(A_1, \dots, A_n)$ et $\det B = \det_{\mathcal{B}}(B_1, \dots, B_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} B_i, B_2, \dots, B_n\right)$ avec $\sum\limits_{i=1}^{n} B_i = (n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.
Par suite $\det B = (n-1)\det_{\mathcal{B}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i, B_2 - \sum\limits_{i=1}^{n} A_i, \dots, B_n - \sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$
Ce qui donne
$\det B = (n-1)\det_{\mathcal{B}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i, -A_2, \dots, -A_n\right) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(A_1, \dots, A_n)$
Finalement $\det B = (-1)^{n-1}(n-1)\det A$.

Exercice 71 : [énoncé]
a) $G \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, G est non vide, stable par passage à l'inverse et par produit car V l'est. Ainsi G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ donc un groupe.
b) Si $M \in G$ alors $\det M, \det M^{-1} \in \mathbb{Z}$ et $\det M \times \det M^{-1} = \det I_4 = 1$ donc $\det M = \pm 1$.
Inversement si $\det M = \pm 1$ alors $M^{-1} = {}^t\mathrm{com}M \in V$ donc $M \in G$.

c)

$$\det M = ((a+c)^2 - (b+d)^2)((a-c)^2 + (b-d)^2)$$

donc

$$\det M = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (a+c)^2 - (b+d)^2 = \pm 1 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = \pm 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système à coefficients entiers donne à l'ordre près :
$a, b, c, d = \pm 1, 0, 0, 0$.
Posons J la matrice obtenue pour $a = c = d = 0$ et $b = 1$. On vérifie $J^4 = I_4$.
L'application $\varphi : U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to G$ définie par $\varphi(\varepsilon, n) = \varepsilon J^n$ est bien définie, c'est un morphisme de groupe, injectif et surjectif. Ainsi G est isomorphe à $U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou plus élégamment à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 72 : [énoncé]
Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \det A + v \det B = 1$. $U = u^t(\mathrm{com}A)$ et $V = v^t(\mathrm{com}B)$ conviennent alors.

Exercice 73 : [énoncé]
Notons que pour $n = 1$: la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ est vraie pour tout A et tout X.
On suppose dans la suite $n \geqslant 2$.
Pour $X = A$, la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ donne $2^n \det A = 2 \det A$ et donc $\det A = 0$.
La matrice A n'est donc par inversible et en posant $r < n$ égal à son rang, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Posons alors $X = QJ'_rP$ avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Puisque $A + X = QI_nP = QP$, la matrice $A + X$ est inversible et donc $\det X = \det(A + X) \neq 0$.
On en déduit que la matrice J'_r est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$.

Exercice 74 : [énoncé]
La matrice H est équivalente à la matrice J_1 dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position $(1, 1)$. Notons $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$H = QJ_1P$$

et introduisons $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ déterminée par

$$A = QBP$$

La relation

$$\det(A + H)\det(A - H) \leqslant \det A^2$$

équivaut alors à la relation

$$\det(B + J_1)\det(B - J_1) \leqslant \det B^2$$

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de B et $\mathcal{B} = (E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\det(B + J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 + E_1, C_2, \ldots, C_n) \text{ et } \det(B - J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 - E_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Par multilinéarité du déterminant

$$\det(B+J_1) = \det B + \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \ldots, C_n) \text{ et } \det(B-J_1) = \det B - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \ldots, C_n)$$

d'où l'on tire

$$\det(B + J_1)\det(B - J_1) = \det B^2 - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \ldots, C_n)^2 \leqslant \det B^2$$

Exercice 75 : [énoncé]
L'application $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, f(x_j), \ldots, x_n)$$

est une forme n-linéaire alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda.\det_{\mathcal{B}}$.
On a $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = \lambda$ et par suite

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, f(e_j), \ldots, e_n) = \sum_{j=1}^n a_{j,j} = \mathrm{tr} f$$

avec $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$.

Exercice 76 : [énoncé]
En retranchant la première ligne aux autres lignes, le déterminant de la matrice $A+xJ$ apparaît comme le déterminant d'une matrice où figure des x seulement sur la première ligne. En développant selon cette ligne, on obtient que $\det(A+xJ)$ est une fonction affine de la variable x.
De plus
$$\det(A-xJ)=\det(-{}^tA-xJ)=(-1)^{2n}\det({}^tA+xJ)$$
et puisque la matrice J est symétrique
$$\det(A-xJ)=\det({}^tA+x^tJ)=\det(A+xJ)$$
La fonction affine $x\mapsto\det(A-xJ)$ est donc une fonction paire et par conséquent c'est une fonction constante. On a alors
$$\forall x\in\mathbb{R},\det(A+xJ)=\det(A+0.J)=\det A$$

Exercice 77 : [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^\star$.
La propriété est immédiate pour $n=1$.
Supposons la propriété vérifiée pour $n\geqslant 1$.
Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés énoncées. En développant le déterminant de A selon la première ligne, on obtient
$$\det A=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{1+j}a_{1,j}\Delta_{1,j}$$
avec $\Delta_{1,j}$ mineur d'indice $(1,j)$ de la matrice A.
Puisque la matrice définissant le mineur $\Delta_{1,j}$ est à coefficients positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne est inférieure à 1, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et affirmer $|\Delta_{1,j}|\leqslant 1$.
On en déduit
$$|\det A|\leqslant\sum_{j=1}^{n+1}a_{1,j}\leqslant 1$$
Récurrence établie.

Exercice 78 : [énoncé]
En retirant la première colonne aux autres puis en développant selon cette première colonne, on obtient que
$$\begin{vmatrix} a_1+x & & (x)\\ & \ddots & \\ (x) & & a_n+x\end{vmatrix}=\alpha x+\beta$$
avec α,β réels qu'il ne reste plus qu'à calculer...
$$\alpha=\begin{vmatrix} a_1+x & & (x)\\ & \ddots & \\ (x) & & a_n+x\end{vmatrix}'_{x=0}=\hat{a}_1a_2\dots a_n+\dots+a_1\dots a_{n-1}\hat{a}_n$$
et
$$\beta=\begin{vmatrix} a_1+x & & (x)\\ & \ddots & \\ (x) & & a_n+x\end{vmatrix}_{x=0}=a_1\dots a_n$$

Exercice 79 : [énoncé]
On réalise les opérations élémentaires $C_n\leftarrow C_n-x_1C_{n-1}$, $C_{n-1}\leftarrow C_{n-1}-x_1C_{n-2},\dots,C_2\leftarrow C_2-x_1C_1$:
$$V_n(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_2-x_1)\end{vmatrix}$$
On développe selon la première ligne et on factorise par ligne :
$$V_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{j=2}^n(x_j-x_1)V_{n-1}(x_2,\dots,x_n)$$
On réitère
$$V_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{j=2}^n(x_j-x_1)\prod_{j=3}^n(x_j-x_2)\dots\prod_{j=n}^n(x_j-x_{n-1})V_1(x_n)$$
avec $V_1(x_n)=1$.
Ainsi
$$V_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

Exercice 80 : [énoncé]
Considérons le polynôme
$$P(X)=(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_1 = -(a_1 + \cdots + a_n)$.
En procédant à l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k C_{k+1}$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$a_i^n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k a_i^k = P(a_i) - \alpha_1 a_i^{n-1} = -\alpha_1 a_i^{n-1} \text{ car } P(a_i) = 0$$

Ainsi

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} = -\alpha_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_n = \sum_{i=1}^n a_i \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Exercice 81 : [énoncé]
Considérons le polynôme

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_k = (-1)^{n-k} \sigma_{n-k}$ où les $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ désignent les expressions symétriques élémentaires en $a_1, \ldots, a_n$.
En procédant à l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{j=0, j \neq k}^{n-1} \alpha_j C_{j+1}$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$a_i^n + \sum_{j=0, j \neq k}^{n-1} \alpha_j a_i^j = P(a_i) - \alpha_k a_i^k = -\alpha_k a_i^k \text{ car } P(a_i) = 0$$

Ainsi

$$D_k = (-1)^{n+1-k} \sigma_{n-k} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^k \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^k \end{vmatrix}$$

En permutant de façon circulaire les $n-k$ dernières colonnes, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Exercice 82 : [énoncé]
En développant selon la première ligne, on peut affirmer que Δ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$.
Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$,
$\Delta(\lambda_k) = (-1)^{k+1} \prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i) V_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \hat{\lambda}_k, \ldots, \lambda_n) = (-1)^{n+1} V_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
où $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ désigne le Vandermonde de $(a_1, \ldots, a_n)$.
Le polynôme Δ coïncide en n point avec le polynôme constant égal à $(-1)^{n+1} V_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, ils sont donc égaux.

Exercice 83 : [énoncé]

$$D_n = \det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Via $C_1 \leftarrow C_1 - C_n, \ldots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$ puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n) \ldots (b_{n-1} - b_n)}{(a_1 + b_n) \ldots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

Via $L_1 \leftarrow L_1 - L_n, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n)\dots(b_{n-1} - b_n)(a_1 - a_n)\dots(a_{n-1} - a_n)}{(a_1 + b_n)\dots(a_n + b_n)(a_n + b_1)\dots(a_n + b_{n-1})} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Par conséquent

$$D_n = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i + b_j)}$$

Puisque

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i) = 1!2!\dots(n-1)!$$

et

$$\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i + j) = \frac{(n+1)!}{1!}\frac{(n+2)!}{2!}\dots\frac{(2n)!}{n!}$$

on obtient dans le cas particulier

$$D_n = \frac{(1!2!\dots(n-1)!)^3 n!}{(n+1)!(n+2)!\dots(2n)!}$$

Exercice 84 : [énoncé]
On a $H^{-1} = \frac{1}{\det H} {}^t\mathrm{com} H$ avec $\mathrm{com} H = (H_{i,j})$.
Par opérations élémentaires,

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i + b_j)}$$

En simplifiant les facteurs communs, on obtient

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H} = \frac{(-1)^{k+\ell}(n+k-1)!(n+\ell-1)!}{(k+\ell-1)(k-1)!^2(\ell-1)!^2(n-k)!(n-\ell)!}$$

puis

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H} = (-1)^{k+\ell}(k+\ell-1)\binom{n+k-1}{k+\ell-1}\binom{n+\ell-1}{k+\ell-1}\binom{k+\ell-2}{k-1} \in \mathbb{Z}$$

Exercice 85 : [énoncé]
a) Par l'absurde, supposons que P_n possède une racine multiple z. Celle-ci vérifie

$$P_n(z) = P_n'(z) = 0$$

On en tire

$$z^n - z + 1 = 0 (1) \text{ et } nz^{n-1} = 1 \ (2)$$

(1) et (2) donnent

$$(n-1)z = n \ (3)$$

(2) impose $|z| \leqslant 1$ alors que (3) impose $|z| > 1$. C'est absurde.
b) Posons $\chi(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice étudiée. On vérifie

$$\chi(z_i) = \begin{vmatrix} 1 + z_1 - z_i & & 1 & & (1) \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & & \\ (1) & & 1 & & 1 + z_n - z_i \end{vmatrix}$$

En retranchant la $i$ème colonne à toutes les autres et en développant par rapport à la $i$ème ligne, on obtient

$$\chi(z_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} (z_j - z_i) = (-1)^{n-1} P'(z_i)$$

Cependant les polynômes χ et P' ne sont pas de même degré... En revanche, les polynômes χ et $(-1)^n(P - P')$ ont même degré n, même coefficient dominant $(-1)^n$ et prennent les mêmes valeurs en les n points distincts $z_1, \dots, z_n$. On en déduit qu'ils sont égaux. En particulier le déterminant cherché est

$$\chi(0) = (-1)^n \left(P(0) - P'(0)\right) = 2(-1)^n$$

Exercice 86 : [énoncé]
Notons $D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots b_n)$ le déterminant recherché.
En décomposant la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

on obtient que $D_n(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots b_n)$ est la somme des deux déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & a_2+b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a_n+b_n \end{vmatrix} = a_1 D_{n-1}(a_2,\dots,a_n,b_2,\dots,b_n)$$

et

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

Pour calculer ce dernier, on retire la première ligne à chacune des autres lignes et on obtient

$$b_1 \prod_{k=2}^n a_k$$

Ainsi

$$D_n(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots b_n) = a_1 D_{n-1}(a_2,\dots,a_n,b_2,\dots,b_n) + b_1 \prod_{k=2}^n a_k$$

Sachant

$$D_1(a_1,b_1) = a_1 + b_1$$

on conclut

$$D_n(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) = \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \left[b_i \prod_{k=1,k\neq i}^n a_k \right]$$

Exercice 87 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2ar + a^2 = 0$ de racines double a.
On a alors $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ avec $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$.
$D_0 = 1$ et $D_1 = 2a$ donnent

$$D_n = (n+1)a^n$$

Exercice 88 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (a+b)r + ab = 0$ de racines distinctes a et b.
On a $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ avec $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$. $D_0 = 1$ et $D_1 = a+b$ donnent

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Exercice 89 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (1+x^2)r - x^2 = 0$ de racines 1 et x^2.
Si $x^2 \neq 1$ alors $D_n = \lambda + \mu x^{2n}$ avec $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$
$D_1 = 1$ et $D_2 = 1 + x^2$ donnent

$$D_n = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

Si $x^2 = 1$ alors $D_n = \lambda n + \mu$.
$D_1 = 1$ et $D_2 = 2$ donnent

$$D_n = n + 1$$

Exercice 90 : [énoncé]
En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geqslant 2$

$$D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos\theta r + 1 = 0$ de racines $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$.
Si $\theta \neq 0 \quad [\pi]$ alors $D_n = \lambda\cos n\theta + \mu\sin n\theta$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2\cos\theta$ donnent

$$\begin{cases}\lambda = 1\\ \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta = 2\cos\theta\end{cases}$$

puis

$$\begin{cases}\lambda = 1\\ \mu = 1/\tan\theta\end{cases}$$

Ainsi

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

Si $\theta = 0 \quad [2\pi]$ alors $D_n = \lambda n + \mu$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = n+1$$

Si $\theta = \pi \quad [2\pi]$ alors $D_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = (-1)^n(n+1)$$

Exercice 91 : [énoncé]
En développant selon la première colonne, puis la première ligne et en recommençant : $D_n = (-n) \times 1 \times (2-n) \times 3$ etc...
Si n est pair le développement s'arrête sur le calcul de

$$\begin{vmatrix} n-1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 0$$

Si n est impair le développement s'arrête par l'étape

$$\begin{vmatrix} 0 & n-2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & n-1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & n\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} n-2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = -3(n-2)\begin{vmatrix} 0 & n\\ 1 & n\end{vmatrix} = 3n(n-2)$$

En écrivant $n = 2p+1$, on parvient à

$$D_n = (-1)^{p+1}(1\times 3\times\cdots\times 2p+1)^2$$

Exercice 92 : [énoncé]
On a

$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n\\ -C & I_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B\\ O_n & D\end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\det D = \det(AD-BC)\det D$$

On peut alors conclure sachant $\det D \neq 0$.

Exercice 93 : [énoncé]
On a

$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O_n\\ -D^{-1}C & I_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B\\ O_n & D\end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \det(A-BD^{-1}C)\det D = \det(AD-BD^{-1}CD)$$

Exercice 94 : [énoncé]
Supposons A inversible.
Par opérations par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & C\\ B & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}C\\ 0 & I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0\\ B & D-BA^{-1}C\end{pmatrix}$$

Or A^{-1} et C commutent donc

$$\begin{vmatrix} A & C\\ B & D\end{vmatrix} = \det A\times\det(D-BCA^{-1}) = \det(DA-BC)$$

Supposons A non inversible.
Pour p assez grand, $A_p = A + \frac{1}{p}I$ est inversible et commute avec C donc

$$\det\begin{pmatrix} A_p & C\\ B & D\end{pmatrix} = \det(DA_p - BC)$$

puis à la limite quand $p \to +\infty$,

$$\det\begin{pmatrix} A & C\\ B & D\end{pmatrix} = \det(DA-BC)$$

Exercice 95 : [énoncé]
a) En multipliant les n dernières lignes par i et les n dernières colonnes aussi :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A & iB \\ -iB & -A \end{pmatrix}$$

puis par opérations sur les lignes

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A & iB \\ A-iB & -A+iB \end{pmatrix}$$

et par opérations sur les colonnes

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A+iB & iB \\ 0 & -A+iB \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det(A+iB)\det(-A+iB)$$

et enfin

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)$$

Les matrices A et B étant réelles, cette écriture est de la forme $z\bar{z} = |z|^2 \geqslant 0$.
b) $\det(A+iB)\det(A-iB) = \det(A^2+B^2)$ car A et B commutent donc $\det(A^2+B^2) \geqslant 0$.
c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple.
d) Si A est inversible, on remarque

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B+D \end{pmatrix}$$

donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(-CA^{-1}B+D) = \det(AD-CB)$ car A et C commutent.
On étend cette égalité aux matrices non inversibles par densité :
Les applications $A \mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $A \mapsto \det(AD-CB)$ sont continues et coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles commutant avec C. Or cet ensemble est dense dans l'ensemble des matrices commutant avec C : si A commute avec C alors pour tout $\lambda > 0$ assez petit $A+\lambda I_n$ est inversible et commute avec C). Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, les deux applications sont égales.

Exercice 96 : [énoncé]
a) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}$.
b) $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{vmatrix} = |A+iB|^2 \geqslant 0$

Exercice 97 : [énoncé]
a) Par les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1}+L_1, \dots, L_{2n} = L_{2n}+L_n$,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n & B \\ B+I_n & I_n+B \end{vmatrix}$$

Par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ O_n & I_n+B \end{vmatrix} = \det(I_n-B)\det(I_n+B)$$

Ainsi A est inversible si, et seulement si, $I_n - B$ et I_n+B le sont (i.e. $1,-1 \notin \mathrm{Sp}B$).
b) On peut présumer que l'inverse de A est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M+BN & N+BM \\ BM+N & BN+M \end{pmatrix}$$

et puisque

$$\begin{cases} M+BN = I_n \\ BM+N = O_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \left(I_n - B^2\right)^{-1} \\ N = -B\left(I_n-B^2\right)^{-1} \end{cases}$$

on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (I_n-B^2)^{-1} & -B(I_n-B^2)^{-1} \\ -B(I_n-B^2)^{-1} & (I_n-B^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 98 : [énoncé]
On introduit

$$N = \begin{pmatrix} {}^tA' & O_{p,n-p} \\ {}^tB' & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On a

$$MN = \begin{pmatrix} A^tA' + B^tB' & B \\ C^tA' + D^tB' & D \end{pmatrix}$$

Or
$$M^t(\mathrm{com}M) = \begin{pmatrix} A^tA' + B^tB' & A^tC' + B^tD' \\ C^tA' + D^tB' & C^tC' + D^tD' \end{pmatrix} = (\det M)^n I_p$$
donc
$$MN = \begin{pmatrix} \det(M)I_p & B \\ O_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$
En passant cette relation au déterminant, on obtient
$$\det M \times \det {}^tA' = \det(M)^p \det D$$
puis facilement la relation proposée sachant $\det M \neq 0$.

Exercice 99 : [énoncé]
a) Cas D inversible
Sachant $C^tD = D^tC$, on a
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tD & O_n \\ -{}^tC & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tD - B^tC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$
et en passant au déterminant on obtient la relation
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det {}^tD = \det\left(A^tD - B^tC\right)\det D$$
puis la relation voulue sachant
$\det D = \det {}^tD \neq 0$
Cas D non inversible
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+\star}$ assez proche de 0, la matrice $D + \lambda I_n$ est inversible et est telle que
$C^t\left(D + \lambda I_n\right)$ est antisymétrique. Par l'étude qui précède, on obtient
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \lambda I_n \end{pmatrix} = \det\left(A^t(D + \lambda I_n) - B^tC\right)$$
et en passant à la limite quand $\lambda \to 0^+$, on obtient
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(A^tD - B^tC\right)$$
b) On procède de façon identique en exploitant $C^tD = -D^tC$ qui donne
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tD & O_n \\ {}^tC & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tD + B^tC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$